

BILANGAN R-M-H UNTUK GRAF LINTASAN P_4 DAN GRAF RODA W_n DENGAN $n \geq 3$

NADYA CITRA MULTASYA*, MAHDHIVAN SYAFWAN, SYAFRIZAL SY

Program Studi S1 Matematika,

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,

Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.

email : nacit.multasya@gmail.com, mahdhivan@sci.unand.ac.id, syafrizalsy@sci.unand.ac.id

Abstrak. Diberikan dua graf G dan H serta bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit himpunan (R-M-H) $M_j(G, H)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi $K_{(t \times j)} \cong F_1 \oplus F_2$ senantiasa F_1 memuat subgraf G atau F_2 memuat subgraf H . Pada artikel ini akan ditentukan $M_3(P_4, W_n)$ dimana P_4 adalah suatu graf lintasan yang terdiri dari 4 simpul dan W_n adalah suatu graf roda yang terdiri dari $n + 1$ simpul dengan $n \geq 3$.

Kata Kunci: Bilangan R-M-H, graf lintasan, graf roda

1. Pendahuluan

Teori Ramsey pertama kali diperkenalkan oleh Frank Plumpton Ramsey dalam makalahnya yang berjudul "On a problem of formal logic" pada tahun 1928 [8]. Ide dasar dari teori yang dikenal dengan teori Ramsey ini adalah bilangan Ramsey klasik. Jika diberikan dua bilangan asli m dan n , maka didefinisikan bilangan Ramsey $r(m, n)$ sebagai bilangan bulat positif terkecil p sedemikian sehingga jika graf lengkap K_p diberi 2-pewarnaan merah dan biru pada setiap sisinya, maka akan selalu terdapat graf lengkap K_m merah atau graf lengkap K_n biru sebagai subgraf dari K_p [5]. Hingga saat ini, baru ditemukan sembilan bilangan Ramsey klasik, yaitu $r(3, 3) = 6$, $r(3, 4) = 9$, $r(3, 5) = 14$, $r(3, 6) = 18$, $r(3, 7) = 23$, $r(3, 8) = 28$, $r(3, 9) = 36$, $r(4, 4) = 18$, dan $r(4, 5) = 25$ [7].

Kajian bilangan Ramsey diperluas untuk dua graf sebarang. Misalkan diberikan sebarang graf F dan H . Bilangan Ramsey $r(F, H)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga jika graf lengkap K_n diberi sebarang pewarnaan merah-biru pada setiap sisinya, maka graf lengkap K_n akan selalu memuat subgraf berwarna merah yang isomorfik dengan F atau subgraf berwarna biru yang isomorfik dengan H [4]. Bilangan Ramsey pun dikembangkan untuk kasus dua partit dan dinamakan bilangan Ramsey bipartit. Bilangan Ramsey bipartit kemudian diperumum menjadi bilangan Ramsey multipartit. Pada awal

*Corresponding author

abad ke-21, Burger dan Vuuren mengkaji bilangan Ramsey multipartit dan mempublikasikan hasilnya dalam jurnal berjudul "Ramsey numbers in complete balanced graphs". Kedua ahli matematika ini membagi jurnal tersebut menjadi dua bagian. Jurnal bagian pertama membahas bilangan Ramsey multipartit himpunan (R-M-H) [2] dan bagian kedua membahas bilangan Ramsey multipartit ukuran (R-M-U) [3].

Pada tahun 2020, Yuri [10] telah menentukan rumus untuk bilangan R-M-H $M_2(P_n, W_s)$ dengan $n = 3$, $n = 4$, dan $s \geq 3$. Setahun setelahnya, Lubis [6] mengkaji bilangan R-M-H kombinasi graf lintasan P_3 dengan graf roda W_n untuk $n \geq 3$ dan $j = 4$ dalam skripsinya. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji bilangan R-M-H kombinasi graf lintasan dengan graf roda. Adapun graf yang peneliti kaji dalam artikel ini adalah graf lintasan P_4 dan graf roda W_n .

2. Landasan Teori

Suatu subgraf dari graf G yang himpunan simpulnya $U \subseteq V(G)$ dan himpunan sisinya adalah semua sisi dari graf G yang mengaitkan dua simpul di U dinamakan **subgraf terinduksi** dan dinotasikan dengan $G[U]$ [9]. Graf G dan H **isomorfik** jika terdapat suatu fungsi bijektif $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian sehingga simpul u dan v bertetangga pada G jika dan hanya jika $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ bertetangga di H . **Siklus Hamilton** adalah suatu lintasan tertutup yang semua simpul dilewati tepat satu kali. Berikut beberapa teorema terkait siklus Hamilton yang akan digunakan pada artikel ini.

Teorema 2.1. [4] (*Teorema Dirac*) Jika G adalah graf dengan kardinalitas simpul $n \geq 3$ dan $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka G memuat siklus Hamilton.

Teorema 2.2. [4] (*Teorema Ore*) Misalkan G adalah graf dengan orde $n \geq 3$ dan $\sigma_2(G)$ menyatakan jumlah derajat minimum dari dua simpul yang tidak bertetangga di G . Jika $\sigma_2(G) \geq n$, maka G memuat siklus Hamilton.

Graf lintasan adalah graf terhubung sederhana yang simpulnya dapat disusun dalam suatu barisan sedemikian sehingga dua simpulnya bertetangga jika kedua simpul tersebut berurutan dalam barisan tersebut [1]. Graf lintasan P_n memiliki n simpul dan $n - 1$ sisi dengan $n \geq 1$ [4]. Graf lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang semua simpulnya berderajat 2. **Graf roda** merupakan suatu graf terhubung sederhana yang memuat graf lingkaran ditambah satu simpul pusat yang bertetangga dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut. Graf ini memiliki $n + 1$ simpul dan $2n$ sisi dengan $n \geq 3$ dan dinotasikan sebagai W_n . **Graf multipartit** adalah graf yang semua simpulnya dapat dipartisi ke dalam k himpunan partit dengan syarat setiap simpul yang berada di partit yang sama tidak bertetangga. Graf 2-partit disebut juga graf bipartit. Graf multipartit seimbang lengkap $K_{(t \times j)}$ adalah setiap simpul bertetangga dengan setiap simpul pada partit lainnya dan tidak bertetangga dengan simpul pada partit yang sama dan kardinalitas simpul pada setiap himpunan partitnya sama yaitu j . **Graf bintang** S_m adalah graf bi-

partit lengkap dimana kardinalitas simpul salah satu partitnya adalah 1 (dinamakan simpul pusat) dan m selainnya.

Teorema 2.3. [1] *Suatu graf G dikatakan bipartit jika dan hanya jika graf G tidak memuat siklus ganjil.*

Pada tahun 2004, Burger dan Vuuren mendefinisikan bilangan R-M-H sebagai berikut.

Definisi 2.4. [2] *Misalkan $K_{(\zeta \times j)}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari ζ himpunan partit dan j banyaknya simpul pada setiap himpunan partit. Misalkan j, l, n, s , dan t adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Bilangan R-M-H $M_j(K_{(n \times l)}, K_{(s \times t)})$ adalah bilangan bulat positif terkecil ζ sedemikian sehingga sebarang pewarnaan dari sisi $K_{(\zeta \times j)}$ menggunakan dua warna merah dan biru, maka mestilah $K_{(\zeta \times j)}$ ini memuat $K_{(n \times l)}$ merah atau $K_{(s \times t)}$ biru sebagai subgraf.*

Selanjutnya, Definisi 2.4 diperumum untuk kombinasi dua graf sebarang yang tidak harus lengkap dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5. *Diberikan dua graf G dan H , dan bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan R-M-H $M_j(G, H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{(t \times j)}$ diberi sebarang pewarnaan merah-biru, maka graf $K_{(t \times j)}$ akan memuat subgraf G berwarna merah atau subgraf H berwarna biru.*

Definisi 2.5 ekuivalen dengan definisi berikut.

Definisi 2.6. *Diberikan dua graf G dan H , dan bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan R-M-H $M_j(G, H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi $K_{(t \times j)} \cong F_1 \oplus F_2$ maka senantiasa F_1 memuat subgraf G atau F_2 memuat subgraf H .*

3. Bilangan R-M-H untuk P_4 dan W_n dengan $n \geq 3$

Berdasarkan Definisi 2.6, bilangan R-M-H $M_3(P_4, W_n)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi $H = K_{(t \times 3)} \cong F \oplus G$ akan selalu terdapat F yang memuat P_4 atau G yang memuat W_n sebagai subgraf dari H . Artikel ini menggunakan istilah *hub* sebagai simpul pusat dari graf roda W_n dan *pusat* sebagai simpul pusat dari graf bintang S_m . Berikut disajikan teorema-teorema untuk menentukan bilangan R-M-H $M_3(P_4, W_n)$.

Teorema 3.1. $M_3(P_4, W_n) = 4$ untuk $n \in \{4, 6\}$.

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \geq 4$. Misalkan graf $F = K_{((4-1) \times 3)} \cong$

$F_1 \oplus F_2$. Pilih $F_1 = 3C_3$. Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3$ adalah himpunan partit di F . Pandang simpul x yang berada di partit V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di F_1 . Perhatikan bahwa $\Delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \leq 1$, sehingga tidak mungkin subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n . Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$ sebagai subgraf dari F . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \geq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \leq 4$. Misalkan graf $G = K_{(4 \times 3)} \cong G_1 \oplus G_2$. Identifikasi semua kasus G_1 yang tidak memuat P_4 . Akan ditunjukkan G_2 memuat W_n . Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ adalah himpunan partit di G . Berikut kasus-kasus untuk $G_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 1. $G_1 = 4C_3$.

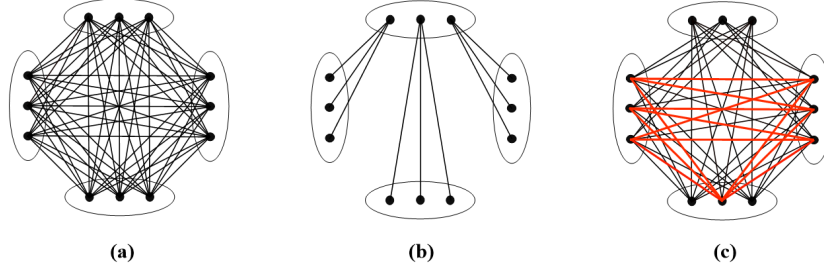
Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu simpul x pada partit V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 7 simpul dan $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4 > \frac{7}{2}$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 7$. Karena terdapat simpul x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Kasus 2. G_1 adalah hutan.

Misalkan G_1 adalah hutan yang komponennya graf bintang $n_i S_{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 12$ dengan $0 \leq m_i \leq 9$, $n_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{12} n_i m_i = 12$. Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Kasus ini dibagi menjadi dua subkasus sebagai berikut.

Subkasus 2.1. $G_1 = 3S_4$ dimana setiap *pusat* berada di partit V_k dan setiap daun dari masing-masing graf bintang S_4 berada di suatu partit V_j dengan $j \neq k$.

Misalkan partit V_k memuat *pusat*. Perhatikan bahwa derajat setiap simpul pada V_k lebih besar dibandingkan derajat simpul pada $G_1 \setminus V_k$. Oleh karena itu, simpul pada V_k tidak dapat dijadikan *hub* di G_2 dan *hub* mestilah berada di $G_2 \setminus V_k$. Pandang suatu simpul x pada V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 8 simpul dan $\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 9 > 8$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 8$. Perhatikan bahwa subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ isomorfik dengan graf bipartit $K_{(2 \times 4)}$. Berdasarkan Teorema 2.3, $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ tidak memuat siklus ganjil. Oleh karena itu, $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ hanya memuat C_n untuk $n \in \{4, 6, 8\}$. Karena terdapat simpul x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G . Ilustrasi subkasus ini dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.


 Gambar 1. (a) $G = K_{4 \times 3}$, (b) $G_1 = 3S_4 \not\supseteq P_4$, (c) $G_2 \supseteq W_n$

Subkasus 2.2. $G_1 \neq 3S_4$ yang setiap *pusat* berada di partit V_k dan setiap daun dari masing-masing graf bintang S_4 berada di suatu partit V_j dengan $j \neq k$.

Pilih simpul x pada partit V_j yang terkait dengan *pusat* dari $\max\{S_{mi}\}$, sedemikian sehingga V_j merupakan partit dengan jumlah derajat ketiga simpulnya maksimal di G_1 . Pandang simpul x ini sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 8 simpul dan $\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 9 > 8$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 8$. Karena terdapat simpul x pada partit V_x sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Dari **kasus 1**, **subkasus 2.1**, dan **subkasus 2.2**, diperoleh $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \leq 4$.

Dengan demikian, disimpulkan $M_3(P_4, W_n) = 4$ untuk $n \in \{4, 6\}$. □

Teorema 3.2. $M_3(P_4, W_n) = 5$ untuk $n \in \{3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \geq 5$. Misalkan graf $F = K_{((5-1) \times 3)} \cong F_1 \oplus F_2$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ adalah himpunan partit di F . Berikut beberapa kasus untuk $F_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 1. $F_1 = 4C_3$.

Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu simpul x pada partit V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di F_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 7 simpul dan $\delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4 > \frac{7}{2}$ memuat siklus Hamilton, artinya $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 7$ dan tidak memuat C_n untuk $n > 7$. Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$.

Kasus 2. $F_1 = 3S_4$ dimana setiap *pusat* berada di partit V_k dan setiap daun dari

masing-masing graf bintang S_4 berada di suatu partit V_j dengan $j \neq k$.

Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya perhatikan bahwa derajat setiap simpul pada V_k lebih besar dibandingkan derajat simpul pada $F_1 \setminus V_k$. Oleh karena itu, simpul pada V_k tidak dapat dijadikan *hub* di F_2 dan *hub* mestilah berada di $F_2 \setminus V_k$. Pandang suatu simpul x pada V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di F_1 . Perhatikan bahwa $\delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 8 simpul dan $\sigma_2(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 9 > 8$ memuat siklus Hamilton, artinya $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 8$. Perhatikan subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ isomorfik dengan graf bipartit $K_{(2 \times 4)}$. Menurut Teorema 2.3, $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ tidak memuat siklus ganjil. Oleh karena itu, graf $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ hanya memuat C_n untuk $n \in \{4, 6, 8\}$ dan tidak memuat C_n untuk $n \in \{3, 5, 7\}$. Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$.

Dari **kasus 1** dan **kasus 2**, diperoleh $F_2 \not\supseteq W_n$ sebagai subgraf dari F . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \geq 5$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \leq 5$. Misalkan graf $G = K_{(5 \times 3)} \cong G_1 \oplus G_2$. Identifikasi semua kasus G_1 yang tidak memuat P_4 . Akan ditunjukkan G_2 memuat W_n . Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ adalah himpunan partit di G . Berikut kasus-kasus untuk $G_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 1. $G_1 = 5C_3$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu simpul x pada partit V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 10 simpul dan $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 7 > \frac{10}{2}$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 10$. Karena terdapat simpul x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Kasus 2. G_1 adalah hutan yang komponennya graf bintang $n_i S_{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 15$ dengan $0 \leq m_i \leq 12$, $n_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{15} n_i m_i = 15$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pilih simpul x pada partit V_j yang terkait dengan *pusat* dari $\max\{S_{m_i}\}$ sedemikian sehingga V_j merupakan partit dengan jumlah derajat ketiga simpulnya maksimal di G_1 . Pandang simpul x ini sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 5$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan 11 simpul dan $\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 11 = 11$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 11$. Karena terdapat simpul x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Dari **kasus 1** dan **kasus 2**, diperoleh $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G . Oleh karena

itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \leq 5$.

Dengan demikian, disimpulkan $M_3(P_4, W_n) = 5$ untuk $n \in \{3, 5, 7, 8, 9, 10\}$. \square

Teorema berikut untuk menentukan bilangan R-M-H untuk graf lintasan P_4 dan graf roda W_n dengan $n \geq 11$.

Teorema 3.3. $M_3(P_4, W_n) = \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 11$.

Bukti.

Pertama-tama akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \geq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Misalkan graf $F = K_{(\lceil \frac{n+5}{3} \rceil - 1) \times 3} \cong F_1 \oplus F_2$. Pilih $F_1 = \left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1 \right) C_3$. Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1$ adalah himpunan partit di F . Pandang suatu simpul x pada partit V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di F_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan $3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right)$ simpul dan $\delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right) - 2 \geq 3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right)/2$ memuat siklus Hamilton, artinya $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right) - 2$. Perhatikan bahwa untuk membentuk C_n dibutuhkan minimal n simpul, sedangkan pada $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ terdapat $3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right) - 2 < n$ simpul untuk $n \geq 11$. Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$ sebagai subgraf dari F . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \geq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \leq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Misalkan graf $G = K_{(\lceil \frac{n+5}{3} \rceil \times 3)} \cong G_1 \oplus G_2$. Identifikasi semua kasus G_1 yang tidak memuat P_4 . Akan ditunjukkan G_2 memuat W_n . Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ adalah himpunan partit di G . Berikut kasus-kasus untuk $G_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 1. $G_1 = \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil C_3$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu simpul x pada partit V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan $3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$ simpul dan $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 2 \geq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)/2$ untuk $n \geq 11$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n . Karena terdapat simpul x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Kasus 2. G_1 adalah hutan yang komponennya graf bintang $n_i S_{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ dengan $0 \leq m_i \leq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$, $n_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{3\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil} n_i m_i = 3\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pilih simpul x pada partit V_j yang terkait dengan pusat dari $\max\{S_{m_i}\}$ sedemikian sehingga V_j merupakan partit dengan jumlah derajat ketiga simpulnya maksimal di G_1 . Pandang simpul x ini sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan simpul yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan $3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$ simpul dan $\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 2\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil + 1 \geq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$ untuk $n \geq 11$ memuat siklus Hamilton, artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n . Karena terdapat simpul x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Dari **kasus 1** dan **kasus 2**, diperoleh $G_2 \supseteq W_n$. Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \leq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$.

Dengan demikian, disimpulkan $M_3(P_4, W_n) = \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 11$. □

4. Kesimpulan

Pada artikel ini diperoleh bilangan R-M-H $M_3(P_4, W_n)$ dengan hasil sebagai berikut.

$$M_3(P_4, W_n) = \begin{cases} 4 & ; n \in \{4, 6\} \\ 5 & ; n \in \{3, 5, 7, 8, 9, 10\} \\ \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil & ; n \geq 11 \end{cases}$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, M.Si, ibu Radhiatul Husna, M.Si, dan bapak Dr. Admi Nazra yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York
- [2] Burger, A.P. dan Vuuren, J.H Van. 2004. Ramsey numbers in complete balance multipartite graphs, Part I: Set numbers. *Discrete Mathematics*. **283**: 37-43
- [3] Burger, A.P. dan Vuuren, J.H Van. 2004. Ramsey numbers in complete balance multipartite graphs, Part II: Size numbers. *Discrete Mathematics*. **283**: 45-49

- [4] Chartrand, G., Lesniak, L, dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs. Sixth Edition*. CRC Press, Boca Rotan
- [5] Clark, J. dan Holton, D.A. 1995. *A First Look at Graph Theory*. Allied Publishers LTD, Singapura
- [6] Lubis, A.A. 2021. Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan dengan Graf Roda $M_4(P_3, W_n)$ dengan $n \geq 3$. *Skripsi S-1*, tidak diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas
- [7] Radziszowski, S.P. 2021. Small Ramsey numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*. **16**: 4
- [8] Ramsey, A.P. 1928. On a problem of formal logic. *Proceedings Of The London Mathematical Society*. **30**: 264-286
- [9] Wallis, W.D. 2007. *A Beginner's Guide to Graph Theory. Second Edition*. Birkhauser, Carbondale
- [10] Yuri, R. 2020. Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan dengan Roda. *Tesis S-2*, tidak diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas